线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性方程组求解

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定义 (加法与数乘)

设 λ 为数域 $\mathbb{F}$ 中的数. 取两个 $\mathbb{F}$ 系数的 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 定义

- 加法

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}:=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

- 数乘

$$\lambda A:=(\lambda a_{ij})_{m\times n}:=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

类似地定义矩阵的减法运算和负矩阵:

$$A-B:=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n},\quad -A:=(-a_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的线性运算与基本矩阵

定理

矩阵的加法和数乘运算满足线性运算的八条基本性质.

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \uparrow & \\ \text{第 } j \text{ 列} & \end{array}$$

引理

任意 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 都可以唯一的表示为基本矩阵的线性组合

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

定义 (线性映射)

给定一个数组向量空间之间的映射 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. 若 $\mathscr{A}$ 满足

$$\begin{aligned} &\text{(保持加法)} \quad \mathscr{A}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathscr{A}(\vec{a}) + \mathscr{A}(\vec{b}); \\ &\text{(保持数乘)} \quad \mathscr{A}(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathscr{A}(\vec{a}) \end{aligned} \tag{$*$}$$

则 $\mathscr{A}$ 称为线性映射.

$$\boxed{\mathbb{F}^{m\times n} \quad \xleftrightarrow{1:1} \quad \text{从 } \mathbb{F}^n \text{ 到 } \mathbb{F}^m \text{ 的全体线性映射.}}$$

引理

线性映射的合成仍然是线性映射.

$$\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \quad (y_1, \cdots, y_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k, \sum_{j=k}^{n} a_{2k} y_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} a_{mk} y_k \right).$$

$$\mathscr{B}: \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^n, \quad (z_1, \cdots, z_p) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{p} b_{1j} z_j, \sum_{j=1}^{p} b_{2j} z_j, \cdots, \sum_{j=1}^{p} b_{nj} z_j \right).$$

$$\mathscr{A} \circ \mathscr{B} (z_1, \cdots, z_p)^T = \left(\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kj} \right) z_j, \cdots, \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{kj} \right) z_j \right)^T.$$

矩阵的乘法

线性映射的合成自然地引出矩阵乘法定义如下：

定义 (矩阵乘法)

设 $A=(a_{ik})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$,$B=(b_{kj})_{n\times p}\in\mathbb{F}^{n\times p}$. 定义

$$AB:=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times p}\in\mathbb{F}^{m\times p}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{array}\right)$$

$$:=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}} & \cdots & \boxed{a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\cdots+a_{1n}b_{np}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1}} & \cdots & \boxed{a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\cdots+a_{mn}b_{np}} \end{pmatrix}$$

- 并非任意两矩阵都可以相乘. 只有在 A 的列数等 B 的行数时, A 与 B 才可以相乘.
- $AB \neq BA$;
- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$.

例

已知 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_m), C = \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)$. 求 BA 和 AC.

你发现了什么规律?

矩阵乘法运算的基本性质

定理

矩阵乘法运算的基本性质:

1. 乘法结合律: $(AB)C = A(BC)$;
2. 乘法单位元: $IA = AI = A$;
3. 左分配律: $(A+B)C = AC + BC$;
4. 右分配律: $A(B+C) = AB + AC$;
5. 数乘结合律: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda)B$.

其中 A, B, C 是使得运算有意义的矩阵, λ 为常数.

证明思路: 计算并比较两边矩阵的相同位置的元素.

设 A 为 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$ 为 $\mathbb{F}$ 系数的多项式, 定义矩阵多项式

$$f(A) := c_0 I_n + c_1 A + \cdots + c_k A^k.$$

以下关系式是否成立?

1. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?
2. $(I+A)^m = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} A^k$?
3. $f(A)g(A) = g(A)f(A)$?

例

求 Fibonacci 数列 $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 3)$ 的通项公式.

答: $F_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

例

记 n 阶方阵 $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. 计算 J_n^k 和 $(aI_n + bJ_n)^k$.

我们定义如下映射

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

引理

映射 f 保持两边的加法和乘法. 即, 对任意 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

- $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$;
- $f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$.

例

计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^k$.

通过矩阵乘法, 一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

简单地可改写为

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{$*$}$$

其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 为线性方程组的系数矩阵, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 为列向量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

线性变换与矩阵有如下一一对应

$$\boxed{\mathbb{F}^{m\times n} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \text{从 } \mathbb{F}^n \text{ 到 } \mathbb{F}^m \text{ 的全体线性映射.}}$$

若线性变换 $\mathscr{A}$ 与矩阵 A 对应，则对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{\mathbf{n}}$,

$$\mathscr{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$. 设 O 在 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$ 下的坐标为 $X'_0=\begin{pmatrix}x'_0\\y'_0\\z'_0\end{pmatrix}$, 以及 e_j 在基 e'_1,e'_2,e'_3 下的坐标为 $\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\a_{3j}\end{pmatrix}$. 若空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 和 $X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, 则 $\begin{cases}x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+x'_0\\y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+y'_0\\z'&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+z'_0\end{cases}$ 用矩阵的乘法则表示:

$$X'=AX+X'_0$$

其中 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$.

解一元一次方程.

$$
\begin{aligned}
ax = b \Rightarrow & a^{-1}(ax) = a^{-1}b \\
\xRightarrow{\text{结合律}} & (a^{-1}a)x = a^{-1}b \\
\xRightarrow{a^{-1}a=1} & 1x = a^{-1}b \\
\xRightarrow{1x=x} & x = a^{-1}b
\end{aligned}
$$

验证: $\xRightarrow{aa^{-1}=1} a(a^{-1}b) = b$

解一般线性方程组

$$
\begin{aligned}
Ax = b \Rightarrow & A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\
\xRightarrow{\text{结合律}} & (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\
\xRightarrow{A^{-1}A=I} & Ix = A^{-1}b \\
\xRightarrow{Ix=x} & x = A^{-1}b
\end{aligned}
$$

验证: $\xRightarrow{AA^{-1}=I} A(A^{-1}b) = b$

要让上述过程有意义, 仅需要存在矩阵 A^{-1} 满足 $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

例 (鸡兔同笼)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 94 \end{pmatrix}.$$

解: 因为

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

定义 (逆矩阵)

设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵. 如果存在 n 阶方阵 X 满足

$$XA = I = AX$$

则称 A 可逆, 并称 X 为 A 的逆矩阵. 记做 A^{-1}.

奇异方阵, 非奇异方阵

注: 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 不为方阵, 则一定不存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 使得

$$AX = I_m \quad 且 \quad XA = I_n.$$

这也是我们为什么不考虑非方阵的逆.

逆矩阵性质

引理 (存在则唯一)

若 X 和 Y 都为 A 的逆矩阵, 则 $X = Y$.

引理

设 A 和 B 为同阶可逆方阵, λ 为非零常数. 则

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$;
3. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$(穿脱原理).

例

若 $ad \neq bc$, 则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆. 此时

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全不为零, 则

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right).$$

例

1. 证明若 $f(A)=0$ 且 $f(a)\neq 0$, 则 $A-aI$ 可逆.
2. 证明 $I+J_n$ 可逆.
3. 已知 $2A^2-3A+4I=0$, 求 A 和 $A-I$ 的逆.
4. 已知 $3A^3-2A^2+5A+I=0$, 求 A 和 $A+I$ 的逆.

例

证明若 A, B 和 $A+B$ 均可逆, 则 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆.

问题： 如何求一般可逆矩阵的逆？